曲边梯形的面积与定积分的概念

主讲：许宇翔

目录

知识回顾

规则

图形

我们以前学过图形的面积计算，请大家回想一下，有哪些计算公式?

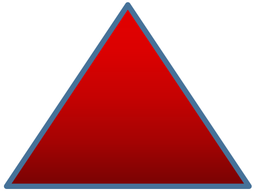
正方形、矩形、三角形、梯形、圆、椭圆等。

?

知识回顾

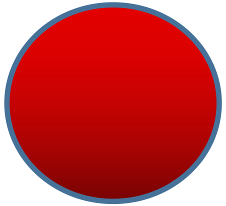
$$s = a^2$$

$$s = ab$$

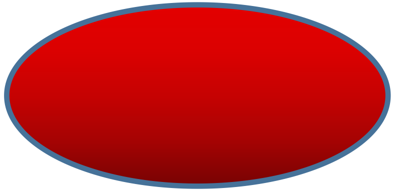


$$s = \frac{1}{2}ah$$

$$s = \frac{(a+c)h}{2}$$



$$s = \pi r^2$$



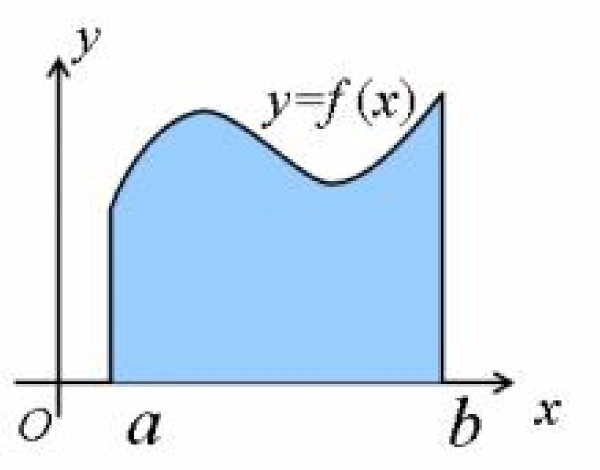
$$s = \pi ab$$

新课引入

分割法是指：把一个组合图形根据它的特征和已知条件分割成几个简单的规则图形，分别算出各个图形的面积，最后求出它们的面积的和。

新课引入

新课引入



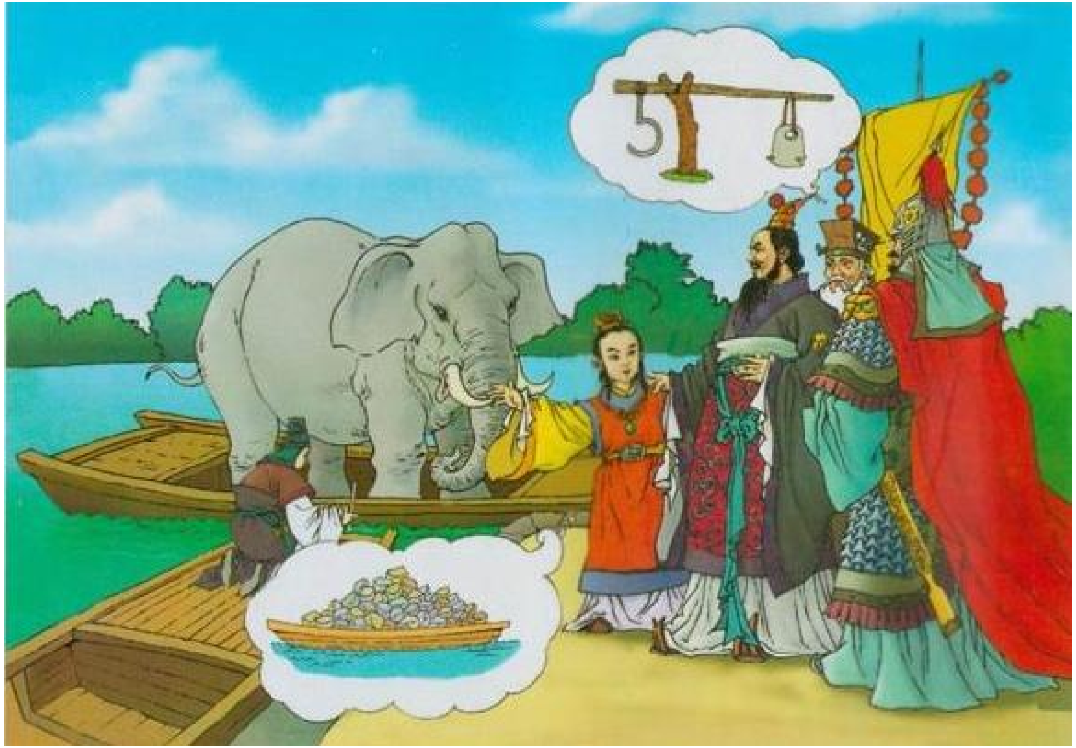
曲边梯形：有三条边是直线，其中两条互相平行，第三条与前两条互相垂直，第四条边是一条曲线的一段弧，它与任一条平行于它的邻边的直线至多只交于一点

由直线 $x=a$，$x=b\,(a\neq b)$，$y=0$**和曲线**$y=f(x)$**所围成的，称之为曲边梯形。**

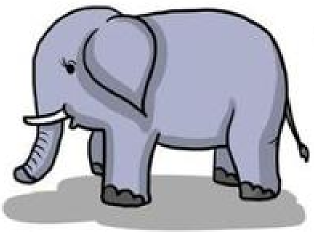
如何求曲边梯形的面积?

四个步骤

步骤一：分割



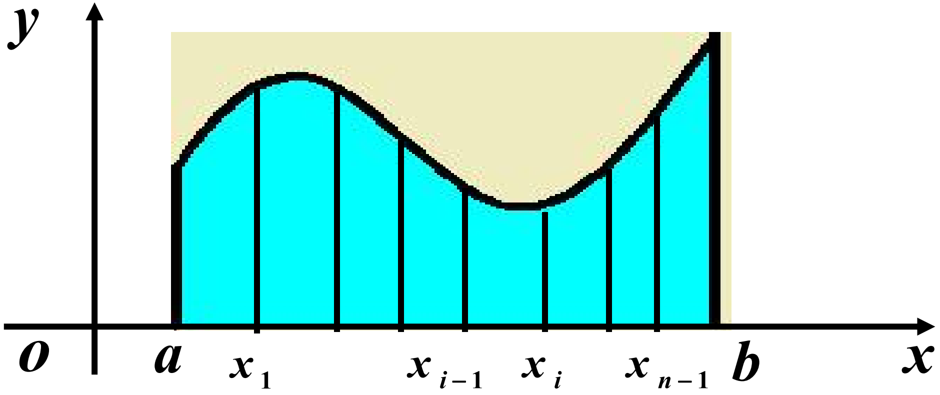
步骤一：分割


=


化整为零

积零为整

步骤一：分割



曲边梯形如图所示：在区间[a,b]内插入若干个分点，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

步骤二：替代

刘徽

割之弥细

失之弥少

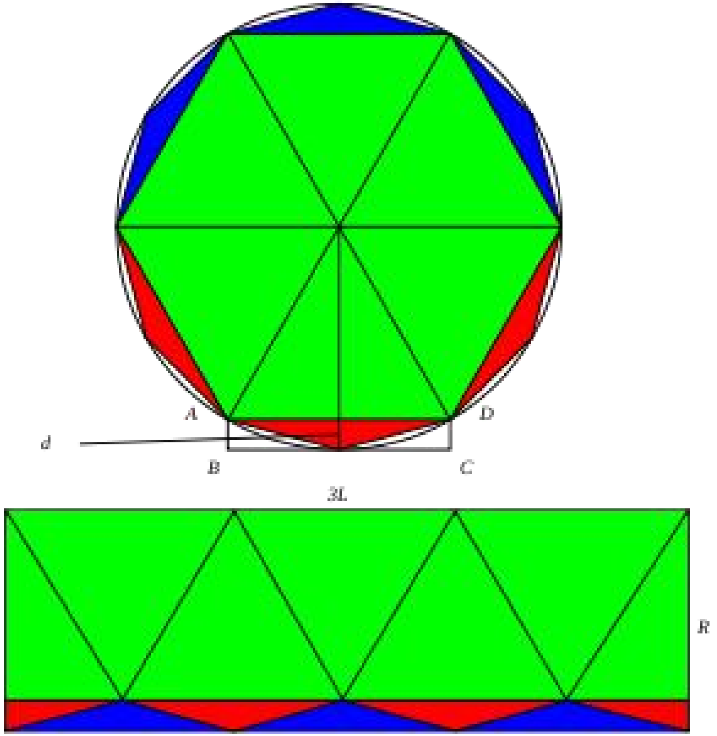
割之又割

以至于不可割

则与圆合体

而无所失矣

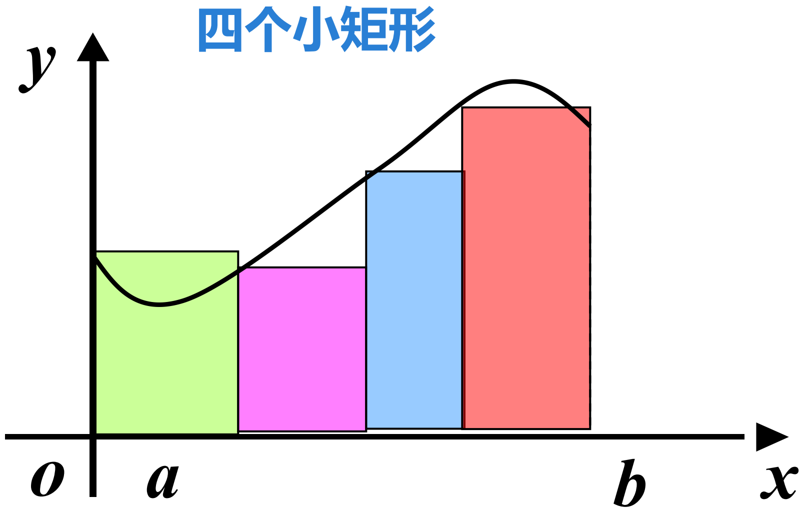
步骤二：替代

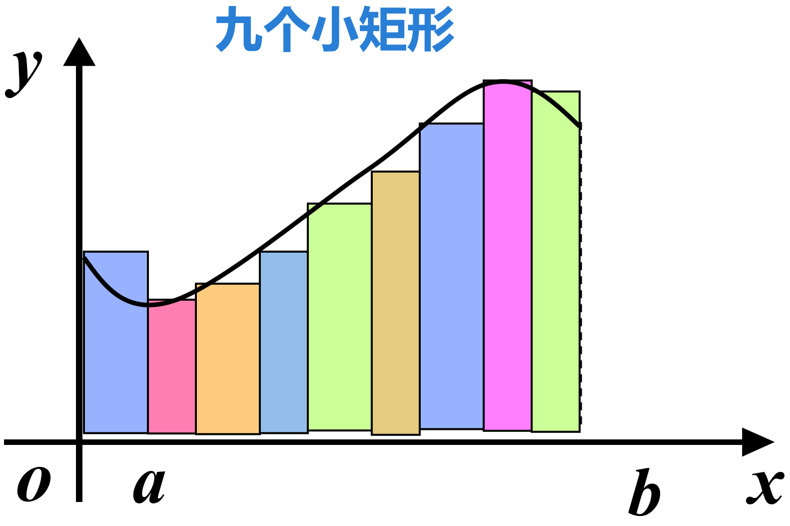


所谓“割圆术”，是用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积并以此求取圆周率的方法。

步骤二：替代

用矩形面积近似取代曲边梯形面积

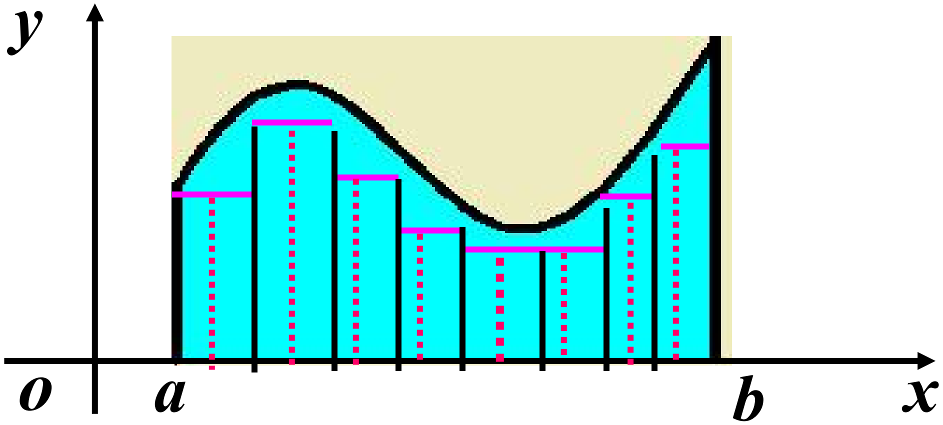




显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

步骤二：替代

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$；在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，



以 $[x_{i-1},x_i]$为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积为

$$A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

步骤三：求和

曲边梯形面积的近似值为：$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

步骤三：求和

积少成多，集腋成裘

积零为整

不积小流无以成江河，不积跬步无以至千里”

勿以恶小而为之， 勿以善小而不为

步骤四：极限

步骤四：极限

步骤四：极限

当分割无限加细 ,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$

趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时，

曲边梯形面积为：

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分的概念

定义1：设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入若干个分点：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间，各小区间的长度依次为：

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

在各小区间上任取一点ξ_i $(\xi_i \in \Delta x_i)$，作和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$，　若$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$存在

称这个极限为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分。

定积分概念

①不定积分:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

积分上限

②定积分:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \xlongequal{\text{简记为}} F(x)\Big|_a^b \quad (N-L\text{公式})$$

积分下限

被积函数

积分变量

$[a,b]$叫做该定积分的积分区间

总结

- **解决问题的方法步骤：**

"分割，替代，求和，取极限"

- **运用的数学思想：**

"化整为零，积零为整"
"以直代曲"
"无限逼近"

思政意义

化整为零

积零为整

分割包围

以小胜积大胜

再见！